Optimal Control for Damped Klein-Gordon Equations (Mathematical Models in Functional Equations)

AUTHOR(S):

中桐, 信一; 河, 準洪

数理解析研究所講究録
1128 巻 2000 年 156-165

Optimal Control for Damped Klein-Gordon Equations

神戸大学工学部　中桐信一 (Shin-ichi Nakagiri)
Korea Univ. of Technology and Education　河 準洪 (Jun-hong Ha)

1　はじめに

昨年の京都大学数理研の研究集会では、減衰項を持つ coupled sine-Gordon 方程式 の弱解の存在と最適制御問題とを議論した ([5] を参照)。ここでは、sine-Gordon 方程式と異なり、非有界な非線型特性を持つ次の Klein-Gordon 方程式の最適制御問題を考える。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} - \beta \Delta y + \delta |y|^\gamma y = f.$$

最適制御問題における、最適性の条件を理解するには、そもそも方程式の解はどのようなクラスの解であるか、またどのようなコストに対して 最適化が考えられるべきかというという問題自体を明らかにする必要がある。そのため、まず基本的な問題と考えられる、上の Klein-Gordon 方程式 に対する弱解の局所および大域的存在と一意性、energy inequality 等の結果を説明する。これは、非線型性がベキで与えられてるので sine-Gordon 方程式と比べるとはるかに難しい問題になる。本論文では、それらの結果をもとにして、この方程式に対する最適制御問題を議論する。

2　ＫＧに対する最適制御問題

Ω を R^n, $n = 1, 2, 3$ の有界集合で、その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は、充分滑らかとする。さらに、$Q = (0,T) \times \Omega$ および $\Sigma = (0,T) \times \Gamma$ とおく。次のような分布制御をもつ、Klein-Gordon 方程式 (KG) で記述される制御系を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial y}{\partial t} - \beta \Delta y + \delta |y|^\gamma y = Bu(t,x) \quad \text{in} \quad Q, \\ y = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ y(0,x) = y_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega \quad \text{and} \quad \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = y_1(x) \quad \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで、α, β, δ, γ は物理定数、$y_0(x)$, $y_1(x)$ は初期条件 である。 $Bu(t,x)$ は、制御項であり、u は制御変数で、$\mathcal{U}$ を制御変数 u の作るヒルベルト空間とする とするとき、 B は $\mathcal{U}$ から $L^2(0,T; L^2(\Omega))$ への制御作用素とする。

状態の観測 $z(u)$ は

$$z(u) = Cy(u) \in \mathcal{M},$$

で与えるとする。ここで $\mathcal{M}$ は観測変数 z の Hilbert 空間, C は観測作用素で、解の空間から $\mathcal{M}$ への線形写像とする。この制御系に関するコスト関数は、一般的な２次コスト

$$J(u) = \|Cy(u) - z_d\|^2_{\mathcal{M}} + (Nu, u)_{\mathcal{U}} \quad \text{for } u \in \mathcal{U}_{ad}$$

で与えるとする。$J(u)$ の式で $z_d \in \mathcal{M}$ は $z(u)$ の目標値、$\mathcal{U}$ は制御変数 の Hilbert 空間、$N \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ は対称正値作用素, $\mathcal{U}_{ad}$ は $\mathcal{U}$ の閉凸部分集合で、 許容制御集合と呼ばれる。

最適制御問題というのは、許容制御集合 $\mathcal{U}_{ad}$ において、コスト関数 $J(u)$ が最小となる u^* を求め、その特徴づけを見出すことである (Lions [3] を参照)。

まず解決すべき問題は、最適制御 u^* の存在であるが、非線型系の場合は相当強い条件のもとでしか存在性は証明されていない。

我々の場合は、sine-Gordon 方程式の場合と同様に、Aubin-Lions の compact imbedding theorem を使って存在性を証明することができた。

u^* の特徴づけに関しては、解の制御項 u についての弱ガトー微分を計算することにより最適性条件を見出す。この際観測のタイプに応じた適切な adjoint systems の導入が必要になる。これらの条件を完全に与えることが、本論文の主たる目的である。

3 Klein-Gordon 方程式の弱解の存在と一意性

Ω を R^n の有界集合で、その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は、充分滑らかとする。さらに、$Q = (0, T) \times \Omega$ および $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$ とおく。我々は、次の減衰項をもつ Klein-Gordon equation を考える。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} - \beta \Delta y + \delta |y|^\gamma y = f \quad \text{in} \quad Q. \tag{3.1}$$

ここで、α, β, $\gamma > 0$, $\delta \in \mathbf{R}$ は定数、Δ はラプラシアン、f は与えられた外力項とする。境界条件は、簡単のため Dirichlet 条件

$$y = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \tag{3.2}$$

で与えられているとする。さらに初期条件は、

$$y(0, x) = y_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = y_1(x) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{3.3}$$

とする。２つのヒルベルト空間 H と V を $H = L^2(\Omega)$ と $V = H^1_0(\Omega)$ により導入する。これらの空間の内積とノルムは次のように定義される。

$$(\psi, \phi) = \int_\Omega \psi(x)\phi(x)dx, \quad |\psi| = (\psi, \psi)^{1/2}, \quad \forall \phi, \psi \in L^2(\Omega),$$

$$(\!(\psi, \phi)\!) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\psi(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)dx, \quad \|\psi\| = (\!(\psi, \psi)\!)^{1/2}, \quad \forall \phi, \psi \in H^1_0(\Omega).$$

このとき、(V, H) は Gelfand triple space であり、記号 $V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'$ で表わす。ここで、$V' = H^{-1}(\Omega)$ であり、埋め込み $V \subset H$ および $H \subset V'$ は連続、dense および compact である。変分法による定式化のため、次の bilinear form を導入する。

$$a(\phi, \varphi) = \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\varphi dx = (\!(\phi, \varphi)\!), \quad \forall \phi, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

この form (3.4) は、対称 かつ $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 上有界で、coercive

$$a(\phi, \phi) \geq \|\phi\|^2, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{3.5}$$

である。従って、有界作用素 $A \in \mathcal{L}(V, V')$ が (3.4) から定義される。($A = -\Delta +$ *Dirichlet* 条件)

非線型スカラー関数 $g(s)$ を、

$$g(s) = |s|^\gamma s \tag{3.6}$$

により定義する。このとき、

$$|g'(s)| \leq (\gamma + 1)|s|^\gamma \tag{3.7}$$

が成り立つ。

ここで、次の Sobolev embeddings を思い出す。

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q < \infty \;\; if \; n = 1, 2; \;\; q = 6 \;\; if \; n = 3. \tag{3.8}$$

この事に注意して、指数 γ については、

$$\begin{cases} 0 \leq \gamma < \infty & \text{when} \;\; n = 1, 2, \\ 0 \leq \gamma \leq 2 & \text{when} \;\; n = 3 \end{cases} \tag{3.9}$$

を仮定する。仮定 (3.9) のもとで、全ての $\phi \in H_0^1(\Omega)$ に対して、合成積 $g \circ \phi$ は、2 乗可積分になる。即ち、非線形作用素

$$g: \; H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad u \; \to g \circ u \tag{3.10}$$

が、定義可能になる。簡単のために、この作用素に対しても同じ記号 g を使う。

次に g の積分である関数 G を、

$$G: \; H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}^+, \quad \psi \; \to G(\psi) = \frac{1}{\gamma + 2} \int_\Omega |\psi(x)|^{\gamma+2} dx \tag{3.11}$$

により定義する。エネルギー関数 G は、(3.8) と (3.9) により、定義可能であり、方程式の大域解の存在や、最適性の条件の導出に用いられる。

従って、問題 (3.1)-(3.3) は、次の $H = L^2(\Omega)$ におけるコーシー問題に書きなおされる。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + \alpha\dfrac{dy}{dt} + \beta Ay + \delta g(y) = f(t) \;\; \text{in} \;\; (0, T), \\ y(0) = y_0 \in V, \;\; \dfrac{dy}{dt}(0) = y_1 \in H. \end{cases} \tag{3.12}$$

さて解空間と超関数の空間を導入する。

解空間 $W(0,T)$ は、次により定義される。

$$W(0,T) = \{g | g \in L^2(0,T;V), g' \in L^2(0,T;H), g'' \in L^2(0,T;V')\}.$$

また $\mathcal{D}'(0,T)$ により、 $(0,T)$ 上の超関数の空間をあらわす。

Dautray and Lions [1] に従い、KG に対する弱い解の定義を与える。

Definition 1 関数 y が (3.12) の弱解であるとは、$y \in W(0,T)$ であり、 y が次の方程式を満たすときをいう。

$$\langle y''(\cdot), \phi\rangle_{V',V} + \alpha(y'(\cdot), \phi) + \beta(\!(y(\cdot), \phi)\!) + \delta(|y(\cdot)|^\gamma y(\cdot), \phi) = (f(\cdot), \phi)$$
$$\text{for all } \ \phi \in V \ \text{ in the sense of } \ \mathcal{D}'(0,T),$$
$$y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y_1.$$

この定義において、記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V',V}$ は、V と V' の間の共役対を表す。また、$y \in W(0,T)$ ならば、$|y(t)|^\gamma y(t) \in H \ \ a.e. \ t \in [0,T]$ なる事を注意しておく。

(3.12) の弱解について、次の局所存在定理が成り立つ。

Theorem 1 α, $\beta > 0$, $\delta \in \mathbf{R}$ とし、γ は、条件 (3.9) を満たしているとする。さらに、f, y_0, y_1 は、仮定

$$f \in L^2(0,T;H), \quad y_0 \in V, \quad y_1 \in H \tag{3.13}$$

を満たしているとする。このとき、f, y_0, y_1 に依存する正の定数 $T_0 < T$ が存在して、問題 (3.12) はただ１つの弱解 y を $W(0,T_0)$ 内に持つ。

方程式 (3.12) の強い解の大域的存在と一意性は、Temam [6] により、$\delta = 1$ および $f \in C([0,T];H)$ なる強い条件のもとで証明されている。(証明は、スケッチのみであるが)

(定理 1 の証明の概略)

弱解の一意性は、次のレンマから従う。

Lemma 1 作用素 g は、V から H への写像として局所 Lipschitz 連続である。即ち、ある定数 $k > 0$ が存在して、

$$|g(\psi) - g(\varphi)| \leq k(\|\psi\| + \|\varphi\|)^\gamma \|\psi - \varphi\|, \quad \forall \psi, \varphi \in V \tag{3.14}$$

が成り立つ。

弱解の存在証明の本質は、方程式と Lemma 1 を使って次の 解の A priori estimates を導くことにある。 つまり、任意の $\epsilon > 0$ に対し、つぎの不等式が成り立つ。

$$\beta\|y(t)\|^2 + |y'(t)|^2 + (2\alpha - (|\delta| + 1)\epsilon) \int_0^t |y'(\sigma)|^2 d\sigma$$
$$\leq \ \ \beta\|y_0\|^2 + |y_1|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|f\|^2_{L^2(0,T;H)} + \frac{|\delta|k^2}{\epsilon} \int_0^t \|y(\sigma)\|^{2(1+\gamma)} d\sigma.$$

右辺の最後の被積分項は指数が2より大きいので、比較定理により局所的な $\|y(t)\|^2+|y'(t)|^2$ の A priori estimates が導かれる。弱解の存在証明は、ガレルキン近似を用いて行う。非線型項があるので、A priori estimates が近似解に対して成り立ったからと言って極限移行がすぐに可能になるわけではない。そのためには、後で述べる Aubin-Lions-Temam のコンパクト性に関する補題を利用する。これにより、近似解の非線型部分の強い収束性が言えて、その極限が弱解になる事が証明される。この部分の証明は、いささか面倒なので略する。

$\delta \geq 0$ の場合は、大域的な解の存在を証明することができる。

Theorem 2 α, $\beta>0$, $\delta \geq 0$ とし、γ は、条件 (3.9) を満たしているとする。さらに、f, y_0, y_1 は、仮定

$$f \in L^2(0,T;H), \quad y_0 \in V \cap L^{\gamma+2}(\Omega), \quad y_1 \in H \tag{3.15}$$

を満たしているとする。このとき、問題 (3.12) はただ1つの弱解 y を $W(0,T)$ 内に持つ。さらに、次のエネルギー不等式がなりたつ。

$$\begin{aligned}&\beta\|y(t)\|^2+|y'(t)|^2+2\delta G(y(t))\\ \leq\ & K(\|y_0\|^2+|y_1|^2+\|y_0\|^{\gamma+2}_{L^{\gamma+2}(\Omega)}+\int_0^T |f(s)|^2 ds), \quad \forall t \in [0,T].\end{aligned}$$

実際、弱解は $y \in L^\infty(0,T;V)$ なる正則性を持っていることを注意しておく。

定理2の証明には、次の Liapunov 関数

$$R(t)=\beta\|y(t)\|^2+|y'(t)|^2+2\delta G(y(t))$$

を用いる。(3.12) の方程式 に $y'(t)$ をかけて、H での内積をとり、関係式

$$\frac{d}{dt}G(y(t))=(g(y(t)),y'(t)) \quad a.e. \ \ in \ \ [0,T]. \tag{3.16}$$

を使うと、 $R(t)$ に対する微分不等式

$$\frac{d}{dt}R(t)+2\alpha_2 R(t) \leq \frac{2}{\alpha}|f(t)|^2$$

を導くことができる。ここで、α_2 は適当な正の定数。この不等式から、解の大域的な A priori estimates を導くことができる。これにより、定理1の証明と同じようにして弱解の一意的存在を証明できる。

以下 特に断らないかぎり、定理2の条件が満たされていると仮定する。

4 最適解の存在

(KG) で記述される制御系 (2.1) を、 **(CS)** とよぶ。$B \in L(\mathcal{U},L^2(0,T;H))$ なので、定理2より、 **(CS)** は、任意の $u \in \mathcal{U}$ に対し一意な 弱解 $y(u)=y(u;t) \in W(0,T)$ を持つ。ここでは、簡

単のため観測を分布観測と終端値観測に制限して話を進める。まず、次の4つの観測空間を導入する。

$$L^2(0,T;V)\subset\mathcal{K}_1,\quad L^2(0,T;H)\subset\mathcal{K}_2,\quad V\subset\mathcal{K}_3,\quad H\subset\mathcal{K}_4,$$

観測空間 $\mathcal{M}=\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2\times\mathcal{K}_3\times\mathcal{K}_4$ とおく。対応するコスト関数は

$$\begin{aligned} J(u) &= \kappa_1\|y(u)-z_d^1\|_{\mathcal{K}_1}^2+\kappa_2\|y'(u)-z_d^2\|_{\mathcal{K}_2}^2 \\ &\quad +\kappa_3\|y(u;T)-z_d^3\|_{\mathcal{K}_3}^2+\kappa_4\|y'(u;T)-z_d^4\|_{\mathcal{K}_4}^2+(Nu,u)_{\mathcal{U}}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

で与える。ここで、目標値

$$z_d^i\in\mathcal{K}_i,\quad i=1,2,3,4 \tag{4.2}$$

であり、 N は $\mathcal{U}$ 上非負値対称、$\kappa_i\geq 0$ かつ、$\sum_{i=1}^4\kappa_i>0$ とする。

Theorem 3 定理2の条件はすべて成り立っていると仮定する。また、制御項に関する条件も満たされているとする。さらに、包含関係

$$L^2(0,T;V)\subset\mathcal{K}_1,\quad L^2(0,T;H)\subset\mathcal{K}_2,\quad V\subset\mathcal{K}_1,\quad H\subset\mathcal{K}_2,$$

が稠密かつ連続とする。このとき、N が正値 もしくは、$\mathcal{U}_{ad}$ が有界ならば、制御系 **(CS)** のコスト関数 $J(u)$ に関する最適制御問題は少なくとも一つの最適制御 u^* をもつ。

証明は、省略する。つぎのコンパクト性に関する補題を利用する。

Proposition 1 (Aubin-Lions-Temam) X_0,X,X_1 は Banach 空間であり、$X_0\hookrightarrow X\hookrightarrow X_1$ は稠密で連続とする。さらに X_0,X_1 は 回帰的であり、埋め込み $X_0\to X$ は コンパクトとする。空間 $\mathcal{Y}$ を

$$\mathcal{Y}=\{\gamma|\gamma\in L^{\alpha_0}(0,T;X_0),\gamma'\in L^{\alpha_1}(0,T;X_1)\}$$

により定義する。ここで、$\alpha_0,\ \alpha_1>1$ とする。このとき、$\mathcal{Y}$ の有界閉集合 は $L^{\alpha_0}(0,T;X)$ で コンパクトである。

5 最適性の必要条件

最適解 u^* の必要条件は、

$$DJ(u^*)(u-u^*)\geq 0\quad\text{for all}\quad u\in\mathcal{U}_{ad} \tag{5.1}$$

で与えられる。この条件を適当な adjoint state system の言葉で書き変える必要がある。またこの J の Gateaux 微分可能性を検証するには、非線型写像 $u\to y(u)\ :\ \mathcal{U}\to W(0,T)$ の弱 Gateaux 微分可能性を確かめなければならない。このためには、非線型項 $|y|^\gamma y$ の Gateaux 微分可能性を示さねばならない。

この写像の微分可能性については、次の定理が成り立つ。

Theorem 4 Theorem 3 の条件のもとで、写像 $u \to y(u) : \mathcal{U} \to W(0,T)$ は、弱 Gateaux 微分可能である。 さらに、$u^* \in \mathcal{U}$ とし、$u^0 \in \mathcal{U}$ を任意に固定したとき、解 $y(u)$ の $u = u^*$ における $u^0 \in \mathcal{U}$ 方向の Gateaux 微分 $z = Dy(u^*)u^0$ は、次の方程式の弱解になっている。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial z}{\partial t} - \beta \Delta z + (\gamma+1)\delta |y(u^*;t)|^\gamma z = Bu^0 \quad \text{in} \quad Q, \\ z = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ z(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial z}{\partial t}(0,x) = 0, \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

次に観測のタイプ分けを考える。コスト関数は、(4.1) で与えられていた。煩雑さを避けるため、我々は各 $\kappa_i = \kappa$ のみが 正となる 4 つの場合を考える。

5.1 解 $y(u)$ の分布観測

観測空間が $\mathcal{M} = \mathcal{K}_1 = L^2(Q) = L^2(0,T;H)$ の場合を考える。このとき、コスト $J(u)$ は、

$$J(u) = \kappa \int_0^T |y(u;t) - z_d(t)|^2 dt + (Nu,u)_{\mathcal{U}} \quad \forall u \in \mathcal{U}, \tag{5.2}$$

で与える。ここで、$z_d = (z_d^1, z_d^2) \in L^2(Q)^2$ とする。

この場合、Theorem 4 を使うことにより、最適性の記述に関する次の定理を示すことができる。

Theorem 5 コスト (5.2) に関する最適制御 u^* は、次のシステムおよび不等式により特徴づけられる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial y}{\partial t} - \beta \Delta y + \delta |y|^\gamma y = Bu^* \quad \text{in} \quad Q, \\ y = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ y(u^*;0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial y}{\partial t}(u^*;0,x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ y \in W(0,T), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \alpha \dfrac{\partial p}{\partial t} - \beta \Delta p + (\gamma+1)\delta |y(u^*;t)|^\gamma p = \kappa(y(u^*) - z_d) \quad \text{in} \quad Q, \\ p = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ p(T,x) = \dfrac{\partial p}{\partial t}(T,x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ p \in W(0,T), \end{cases}$$

$$(Nu^*, u - u^*)_{\mathcal{U}} + \int_Q (p(u^*;t,x)) B(u-u^*)(t,x) dx dt \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

5.2 解の導関数 $y'(u)$ の分布観測

観測空間が、$\mathcal{M}=\mathcal{K}_2=L^2(Q)=L^2(0,T;H)$ の場合を考える。このとき、コスト $J(u)$ は、

$$J(u)=\kappa\int_0^T|y'(u;t)-z_d(t)|^2dt+(Nu,u)_{\mathcal{U}}\quad\forall u\in\mathcal{U},\tag{5.3}$$

で与えられる。ここで、$z_d\in L^2(Q)$ とする。この分布観測の場合は次の最適性の記述に関する次の定理を示すことができる。

Theorem 6 コスト (5.3) に関する最適制御 u^* は、次のシステムおよび不等式により特徴づけられる。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2y}{\partial t^2}+\alpha\dfrac{\partial y}{\partial t}-\beta\Delta y+\delta|y|^\gamma y=Bu^*\ \text{ in }\ Q,\\ y=0\ \text{ on }\ \Sigma,\\ y(u^*;0,x)=0,\ \ \dfrac{\partial y}{\partial t}(u^*;0,x)=0\ \text{ in }\ \Omega,\\ y\in W(0,T),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2p}{\partial t^2}-\alpha\dfrac{\partial p}{\partial t}-\beta\Delta p+(\gamma+1)\delta\displaystyle\int_0^t|y(u^*;s)|^\gamma p'(s)ds=\kappa(\dfrac{\partial}{\partial t}y(u^*)-z_d)\ \text{ in }\ Q,\\ p=0\ \text{ on }\ \Sigma,\\ p(T,x)=\dfrac{\partial p}{\partial t}(T,x)=0\ \text{ in }\ \Omega,\\ p\in W(0,T),\end{cases}$$

$$(Nu^*,u-u^*)_{\mathcal{U}}+\int_Q(-\frac{\partial p}{\partial t}(u^*;t,x))B(u-u^*)(t,x)dxdt\geq0,\quad\forall u\in\mathcal{U}_{ad}.$$

5.3 解 $y(v)$ の終端値観測

観測空間が $\mathcal{M}=\mathcal{K}_3=L^2(\Omega)=H$ である場合を考える。このとき、コスト $J(u)$ は、

$$J(u)=\kappa|y(u;T)-z_d|^2+(Nu,u)_{\mathcal{U}}\quad\forall u\in\mathcal{U}\tag{5.4}$$

で与える。ここで、$z_d\in L^2(\Omega)$ とする。この場合は次の最適性の記述に関する次の定理が得られる。

Theorem 7 コスト (5.4) に関する最適制御 u は、次のシステムおよび不等式により特徴づけられる。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2y}{\partial t^2}+\alpha\dfrac{\partial y}{\partial t}-\beta\Delta y+\delta|y|^\gamma y=Bu^*\ \text{ in }\ Q,\\ y=0\ \text{ on }\ \Sigma,\\ y(u^*;0,x)=0,\ \ \dfrac{\partial y}{\partial t}(u^*;0,x)=0\ \text{ in }\ \Omega,\\ y\in W(0,T),\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \alpha\dfrac{\partial p}{\partial t} - \beta\Delta p + (\gamma+1)\delta|y(u^*;t)|^\gamma p = 0 \ \text{ in } \ Q, \\ p = 0 \ \text{ on } \ \Sigma, \\ p(T,x) = 0, \ \ \dfrac{\partial p}{\partial t}(T,x) = \kappa(y(u^*;T) - z_d) \ \text{ in } \ \Omega, \\ p \in W(0,T), \end{cases}$$

$$(Nu^*, u-u^*)_{\mathcal{U}} + \int_Q (p(u^*;t,x))B(u-u^*)(t,x)dxdt \geq 0, \ \ \forall u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

5.4 解の導関数 $y'(v)$ の終端値観測

観測空間が $\mathcal{M} = \mathcal{K}_4 = L^2(\Omega) = H$ である場合を考える。このとき、コスト $J(u)$ は、

$$J(u) = \kappa|y'(u;T) - z_d|^2 + (Nu,u)_{\mathcal{U}} \quad \forall u \in \mathcal{U} \tag{5.5}$$

で与える。ここで、 $z_d \in L^2(\Omega)$ とする。

この場合観測値が余りにも弱すぎて、adjoint system を弱解の範囲では適切に定義できない。しかし我々は、つぎの強い仮定のもとで最適性の必要条件を示すことができた。

Theorem 8 条件

$$y'(u^*;T) - z_d \in V. \tag{5.6}$$

が満たされているとする。このとき、終端値観測によるコスト $J(u)$ に関する最適制御 u^* は、次のシステムおよび不等式により特徴づけられる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha\dfrac{\partial y}{\partial t} - \beta\Delta y + \delta|y|^\gamma y = Bu^* \ \text{ in } \ Q, \\ y = 0 \ \text{ on } \ \Sigma, \\ y(u^*;0,x) = 0, \ \ \dfrac{\partial y}{\partial t}(u^*;0,x) = 0 \ \text{ in } \ \Omega, \\ y \in W(0,T), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \alpha\dfrac{\partial p}{\partial t} - \beta\Delta p + (\gamma+1)\delta|y(u^*;t)|^\gamma p = 0 \ \text{ in } \ Q, \\ p = 0 \ \text{ on } \ \Sigma, \\ p(T,x) = \kappa(\dfrac{\partial}{\partial t}y(u^*;T) - z_d) \ \text{ in } \ \Omega, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(T,x) = \kappa\alpha(\dfrac{\partial}{\partial t}y(u^*;T) - z_d) \ \text{ in } \ \Omega, \\ p \in W(0,T), \end{cases}$$

$$(Nu^*, u-u^*)_{\mathcal{U}} + \int_Q (p(u^*;t,x))B(u-u^*)(t,x)dxdt \geq 0, \ \ \forall u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

詳細は、紙数の関係上略すが、Lions and Magenes [4] における転換法 (Method of Transposition) を用いて弱い形で adjoint system を定義することにより、Theorem 8 の条件 (5.6) を取り除くことができる。

Theorem 9 終端値観測によるコスト

$$J(u) = \kappa |y'(u;T) - z_d|^2 + (Nu, u)_{\mathcal{U}}$$

に関する最適制御 u^* は、次のシステムおよび不等式により特徴づけられる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial y}{\partial t} - \beta \Delta y + \delta |y|^\gamma y = Bu^* \quad \text{in} \quad Q, \\ y = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ y(u^*; 0, x) = 0, \quad \dfrac{\partial y}{\partial t}(u^*; 0, x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ y \in W(0, T), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_\Omega p \cdot \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} - \beta \Delta \phi + (\gamma + 1) \delta |y(u^*)|^\gamma \phi \right] dxdt \\ \displaystyle = \int_\Omega \kappa (y'(u;T) - z_d) \cdot \phi'(T) dx \\ \forall \phi \in W(0, T) \quad \text{such that} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \beta \Delta \phi + (\gamma + 1) \delta |y(u^*)|^\gamma) \phi \in L^2(0, T; H), \\ \phi = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \qquad \phi(0, x) = \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \end{cases}$$

$$(Nu^*, u - u^*)_{\mathcal{U}} + \int_Q (p(u^*; t, x)) B(u - u^*)(t, x) dxdt \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

また、この転換法 を用いて 強い観測の場合や、境界制御や境界観測の場合にも最適性の条件を記述することができる。これについては [2], [3], [5] を参照されたい。

参考文献

[1] R. Dautary and J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 5, Evolution Problems I*, Springer-Verlag, 1992.

[2] Junhong Ha and S. Nakagiri, *Quadratic Optimal Control Problems for Nonlinear Damped Second Order Systems in Hilbert Spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 30(4), 2261-2272 (1997)

[3] J. L. Lions, Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 1971.

[4] J. L. Lions and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, II*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[5] S. Nakagiri, M. Elgamal and Junhong Ha, *Quadratic Optimal Control Problems of Coupled Sine-Gordon Equations having Damping Terms*, 数理解析研究所講究録 1083, 44-55 (1999)

[6] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physis*, Applied Math. Sci. 68, Springer-Verlag, 1988.